Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.183-194

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕИЗВЕСТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЛИНЕЙНОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ*

Р.А. Алиев[1], А.Х. Абдуллаев[2]

[1]Азербайджанский Университет Кооперации, Баку, Азербайджан
[2]Азербайджанский Государственный Экономический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: ramizaliyev3@rambler.ru

Резюме. Исследуется обратная задача о нахождении коэффициентов линейного эллиптического уравнения при разных граничных условиях в заданном прямоугольнике. Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости решения поставленной обратной задачи. С помощью метода последовательных приближений построен регуляризирующий алгоритм для определения нескольких коэффициентов.

Ключевые слова: обратная задача, эллиптическое уравнение, регулирующий алгоритм.

AMS Subject Classification: 35L20, 35R30, 35P99.

1. Введение

Обратные задачи по определению коэффициентов дифференциальных уравнений с частными производными представляют интерес во многих прикладных исследованиях. Эти задачи приводят к необходимости приближенного решения обратных задач математической физики, которые некорректны в классическом смысле. К ним относятся задачи идентификации неиз-вестных плотностей источников и коэффициентов. Большое значение имеют коэффициентные задачи для эллиптических уравнений, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от одной переменной [1-7], [12-13]. Такие модели характерны для задач теории фильтрации. В частности, определение теплофизических характеристик сред в стационарном случае приводит к обратным задачам для эллиптических уравнений. Исследования таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью.

В работе [9] приведены методы решения различных обратных задач с краевыми условиями.

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 03.11.2015

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.

2. Постановка задачи

Пусть $I = \{1,2\}$, $i_0, e \in I, i_1 = \dfrac{i_0 + 1}{2i_0 - 1}$, $k, q \in \{0,1\}$,

$w_{qkt} = t + (-1)^t (k + q - 2kq)$, $\omega_{qkt} = [1 - k(k-1)]\,[t + (-1)^t q]$, $t = 0,1.$

Через b_t, d_t, $t = 0,1$обозначим константы, которые определяются следующим образом: при $k = 0, q = 0 : b_t = w_{00t}, d_t = \omega_{00t}$, при $k = 0, q = 1$: $b_t = w_{10t}, d_t = \omega_{10t}$, при $k = 1, q = 0 : b_t = w_{01t}, d_t = \omega_{01t}$, при $k = 1, q = 1$: $b_t = w_{11t}, d_t = \omega_{11t}$, $t = 0,1.$

Рассмотрим задачу об определении $\{a_{i_0}(x_2),\ u(x_1, x_2)\}$ из следующих условий

$$-a_1(x_2)u_{x_1x_1} - a_2(x_2)u_{x_2x_2} + c(x_2)u = h(x_1, x_2),\ (x_1, x_2) \in D,$$

$$u(0, x_2) = \phi_1(x_2),\quad (e-1)u_{x_1}(l_1, x_2) + (2-e)u(l_1, x_2) = \phi_2(x_2), \tag{1}$$

$$0 \le x_2 \le l_2, \tag{2}$$

$$b_0 u_{x_2}(x_1, 0) + b_1 u(x_1, 0) = \varphi_1(x_1),\ 0 \le x_1 \le l_1, \tag{3}$$

$$d_0 u_{x_2}(x_1, l_2) + d_1 u(x_1, l_2) = \varphi_2(x_1),\ 0 \le x_1 \le l_1, \tag{4}$$

$$a_{i_0}(x_2)u_{x_1}(0, x_2) = g_{i_0}(x_2),\quad 0 \le x_2 \le l_2, \tag{5}$$

причем $b_0\phi_{1x_2}(0) + b_1\phi_1(0) = \varphi_1(0), d_0\phi_{1x_2}(l_2) + d_1\phi_1(l_2) = \varphi_2(0),\ b_0\phi_{2x_2}(0) +$ $b_1\phi_2(0)\ = \varphi_1^{(e-1)}(l_1), d_0\phi_{2x_2}(l_2) + d_1\phi_2(l_2) = \varphi_2^{(e-1)}(l_1).$ Здесь $D = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, $h(x_1, x_2), \phi_i(x_2),\ \varphi_i(x_1), g_{i_0}(x_2), i = 1,2$ –заданные функции $h(x_1, x_2), h_{x_1x_1}(x_1, x_2) \in C^{\alpha}(\overline{D})$,

$\phi_1(x_2) \in C^{2+\alpha}[0, l_2],\ \phi_2(x_2) \in C^{3-e+\alpha}[0, l_2],\ \varphi_1(x_1) \in C^{1+b_1+\alpha}[0, l_1],\ \varphi_2(x_1) \in$ $C^{1+d_1+\alpha}[0, l_1],\quad g_{i_0}(x_2) \in C^{\alpha}[0, l_2],\ 0 < \alpha < 1.$

Определение. Функции $\{a_{i_0}(x_2), u(x_1, x_2)\}$ назовем решением задачи (1)–(5), если

$$0 < a_{i_0}(x_2) \in C[0, l_2], u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$$

и удовлетворяются соотношения (1) –(5).

Нетрудно проверить, что если решения задачи (1)–(5) существуют, то при принятых пред-положениях о гладкости данных задачи

$a_{i_0}(x_2) \in C^{\alpha}[0,l_2], u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$. Действительно, при принятых предположениях из общей теории эллиптических уравнений следует, что $u(x_1,x_2) \in W_p^2(D) \subset C^{1+\alpha}(\overline{D})$ при $p > 2$ [12,с.283]. Поэтому из дополнительного условия (5) следует, что $a_{i_0}(x_2) \in C^{\alpha}[0,l_2]$. Поэтому $u(x_1,x_2) \in C^{2+\alpha}(\overline{D})$.

Уравнение (1) также можно записать в следующем виде

$$-a_{i_0}(x_2)u_{x_{i_0}x_{i_0}} - a_{i_1}(x_2)u_{x_{i_1}x_{i_1}} + c(x_2)u = h(x_1,x_2), (x_1,x_2) \in D.$$

3. Единственность и устойчивость решения

Пусть, кроме задачи (1)–(5) задана еще задача $(\overline{1}) - (\overline{5})$, где все функции, входящие в (1)-(5) заменены соответствующими функциями с чертой. Положим

$$Z(x_1,x_2) = \overline{u}(x_1,x_2) - u(x_1,x_2), \lambda_{i_0}(x_2) = \overline{a}_{i_0}(x_2) - a_{i_0}(x_2),$$

$$\delta_1(x_2) = \overline{a}_{i_1}(x_2) - a_{i_1}(x_2),\ \delta_2(x_2) = \overline{c}(x_2) - c(x_2),$$

$$\delta_{i+2}(x_2) = \overline{\phi}_i(x_2) - \phi_i(x_2),\ \delta_{i+4}(x_1) = \overline{\varphi}_i(x_1) - \varphi_i(x_1),\ i = 1,2,$$

$$\delta_7(x_1,x_2) = \overline{h}(x_1,x_2) - h(x_1,x_2),\ \delta_8(x_2) = \overline{g}_{i_0}(x_2) - g_{i_0}(x_2).$$

Через $\tilde{\delta}_e(x_1,x_2)$ обозначим функцию на границе при каждом $k,q \in \{0,1\}, e \in I$ совпадающую соответственно с $\delta_{i+2}(x_2),\ \delta_{i+4}(x_1), i = 1,2$ и принадлежащую $C^{2+\alpha}(\overline{D})$. Обозначим

$$k_{ei} = (e-1)(i-1), g_{eij}(l_1) = \left(\frac{l_1}{2}\right)^{(2-j)k_{ei}},\quad d_{ej} = \frac{e+j-1}{(j-1)e+1},$$

$$L_{iqk}(x_j) = x_j^{(j-1)(1-k)q}\ \frac{(2-i)l_j - (-1)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{(j-1)(1-k)q} x_j}{l_j}.$$

Функция $\tilde{\delta}_e(x_1,x_2)$ определяется следующим образом

$$\tilde{\delta}_e(x_1,x_2) = \sum_{i,j=1}^{2} l_{ije}(l_1,l_2)\left[P_i(x_j)\right]^{m_{eij}} \delta_{i+2j}(x_{j+(-1)^{j+1}}) -$$
$$- n_{ije}(l_1,l_2)\left[P_i(x_1)\right]^{e}\left[P_j(x_2)\right]^{t_j} \delta_{j+4}^{(k_{ei})}\left[(i-1)l_1\right].$$

Здесь $l_{eij}(l_p), P_i(x_j), m_{eij}, n_{eij}(l_1,l_2), t_j$ определяются следующим образом:

при $k=0, q=0$:

$l_{eij}(l_1,l_2)=g_{eij}(l_1), P_i(x_j)=L_{i00}(x_j), m_{eij}=d_{ej}, n_{eij}(l_1,l_2)=g_{ei1}(l_1), t_j=1,$

при $k=0, q=1$:

$l_{eij}(l_1,l_2)=g_{eij}(l_1), P_i(x_j)=L_{i10}(x_j), m_{eij}=d_{ej}, n_{eij}(l_1,l_2)=g_{ei1}(l_1), t_j=1,$

при $k=1, q=0$: $l_{eij}(l_1,l_2)=(-1)^{(j-1)i}\, l_2^{(2-i)(j-1)} g_{ei1}(l_1), P_i(x_j)=L_{i01}(x_j),$

$$m_{eij}=2^{(i-1)(j-1)}d_{ej},$$

$n_{eij}(l_1,l_2)=(-1)^j l_2^{2-j} g_{ei1}(l_1), t_j=2^{j-1},$

при $k=1, q=1$: $l_{eij}(l_1,l_2)=l_2^{(i-1)(j-1)} g_{eij}(l_1), P_i(x_j)=L_{i11}(x_j),$

$$m_{eij}=2^{(i2-i)(j-1)}d_{ej},\ n_{eij}(l_1,l_2)=l_2^{j-1}g_{ei1}(l_1), t_j=2^{j-1}.$$

Лемма 1. Пусть решения задачи (1) – (5) существуют. Тогда верны следующие оценки

$$\left|u(x_1,x_2\right| \le \max\Big[\max_D\left|\frac{h(x_1,x_2)}{c(x_1)}\right|, \max_{x_2}\left|\phi_1(x_2)\right|,(2-e)\max_{x_2}\left|\phi_2(x_2)\right|, b_1\max_{x_1}\left|\varphi_1(x_1)\right|, d_1\max_{x_1}\left|\varphi_2(x_1)\right|\Big],$$

$$\left|u_{x_1x_1}(x_1,x_2\right| \le \max\Big[\max_D\left|\frac{h_{x_1x_1}(x_1,x_2)}{c(x_2)}\right|,(e-1)\max_{x_2}\left|\theta_{12}(x_2)\right|, (2-e)\max_i\max_{x_2}\left|\theta_{i1}(x_2)\right|, b_1\max_{x_1}\left|\varphi_{1x_1x_1}(x_1)\right|, d_1\max_{x_1}\left|\varphi_{2x_1x_1}(x_1)\right|\Big] \tag{6}$$

Здесь

$$\theta_{ie}(x_2)=\frac{1}{a_1(x_2)}\left[-a_2(x_2)\phi_{ix_2x_2}(x_2)+c(x_2)\phi_i(x_2)-h^{(k_{ei})}(il_1-l_1,x_2)\right] i=1,2.$$

Доказательство. Первое неравенство для задачи (1)–(3) при каждом $e\in I$ получается из принципа максимума. При $e=1$, продифференцируя уравнение (1) дважды по x_1 и используя принцип максимума, получим вторую оценку. Аналогично, при $e=2$, получим оценку (6). Лемма 1 доказана.

Единственность решения обратной задачи (1)–(5) в предположении его существования устанавливает

Теорема 1. Пусть $g_{i_0}(x_2)\ne 0, Nl_1l_2<1.$ Тогда решение задачи (1)–(5) единственно и верна следующая оценка

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar a_{i_0}(x_2)-a_{i_0}(x_2)\right\|_{C[0,l_2]} \\
&+\left\|\bar u-u\right\|_{C(\bar D)} \le N_1\Big[\left\|\bar a_{i_1}(x_2)-a_{i_1}(x_2)\right\|_{C[0,l_2]}+\left\|\bar c(x_2)-c(x_2)\right\|_{C[0,l_2]}+ \\
&+\left\|\bar h(x_1,x_2)-h(x_1,x_2)\right\|_{C(\bar D)}+\left\|\bar\varphi_1(x_1)-\varphi_1(x_1)\right\|_{C^{1+b_1}[0,l_1]}+ \\
&+\left\|\bar\varphi_2(x_1)-\varphi_2(x_1)\right\|_{C^{1+d_1}[0,l_1]}+ \\
&+\left\|\bar\phi_1(x_2)-\phi_1(x_2)\right\|_{C^2[0,l_2]}+\left\|\bar\phi_2(x_2)-\phi_2(x_2)\right\|_{C^{3-e}[0,l_2]}+ \\
&\left\|\bar g_{i_0}(x_2)-g_{i_0}(x_2)\right\|_{C[0,l_2]}\Big].
\end{aligned} \tag{7}$$

N, N_1 –положительные постоянные, зависящие от данных задачи.

Доказательство. Из $(\bar 1)-(\bar 5)$, соответственно, вычтем (1)–(5) и положим $Z_1(x_1,x_2) = \; = Z(x_1,x_2)-\tilde\delta_e(x_1,x_2)$. Тогда получим

$$-\bar a_1(x_2)Z_{1x_1x_1}-\bar a_2(x_2)Z_{1x_2x_2}=\delta_{e1}(x_1,x_2)-\bar c(x_2)\tilde\delta_e(x_1,x_2)-$$

$$-\bar c(x_2)Z_1+\sum_{i=1}^{2}\alpha_i(x_1,x_2)\lambda_i(x_2), \tag{8}$$

$$Z_1(0,x_2)=0$$

$$(2-e)Z_1(l_1,x_2)+(e-1)Z_{1x_1}(l_1,x_2)=0, \tag{9}$$

$$b_0Z_{1x_2}(x_1,0)+b_1Z_1(x_1,l_2)=0, \tag{10}$$

$$d_0Z_{1x_2}(x_1,l_2)+d_1Z_1(x_1,l_2)=0, \tag{11}$$

$$\lambda_{i_0}(x_2)=\delta_{e2}(x_2)+\gamma_1(x_1)Z_{1x_1}(0,x_2), \tag{12}$$

Здесь

$\alpha_{i_0}(x_1,x_2)=u_{x_{i_0}x_{i_0}}$, $\gamma(x_2)=\bar a_{i_0}(x_2)[-u_{x_1}(0,x_2)]^{-1}$,

$$\delta_{e1}(x_1,x_2)=u_{x_{i_1}x_{i_1}}(x_1,x_2)\delta_1(x_2)-\delta_2(x_2)u+\delta_7(x_1,x_2)+\sum_{i=1}^{2}\bar a_i(x_2)\tilde\delta_{e\,x_ix_i}(x_1,x_2),$$

$$\delta_{e2}(x_2)=\gamma(x_2)\left\{\left[-\bar a_{i_0}(x_2)\right]^{-1}\delta_8(x_2)+\tilde\delta_{e\,x_1}(0,x_2)\right\}.$$

При помощи функции Грина [13, стр.27] из (8)–(11) определим функцию $Z_1(x_1,x_2)$ через правую часть равенства и это выражение подставим в условие (12). Тогда получим

$$Z(x_1,x_2)=\tilde\delta_e(x_1,x_2)+\int_D G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\,\big[\delta_{e1}(\xi_1,\xi_2)-$$

$$\bar c(\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\alpha_{i_0}(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_2)\big]\,d\xi_1d\xi_2,$$

$$\lambda_{i_0}(x_2)=\delta_{e2}(x_2)+\gamma_1(x_2)\int_D G_{x_1}(0,x_2,\xi_1,\xi_2) \\ \left[\delta_{e1}(\xi_1,\xi_2)-\bar{c}(\xi_2)Z(\xi_1,\xi_2)+\right. \\ \left.+\ \alpha_{i_0}(\xi_1,\xi_2)\lambda_{i_0}(\xi_2)\right]d\xi_1 d\xi_2. \tag{13}$$

Для функции Грина справедливы следующие оценки [13,стр.24]

$$\left|G(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\right|\le M_1\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}},$$

$$\left|G_{x_1}(x_1,x_2,\xi_1,\xi_2)\right|\le M_2\left[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_1)^2\right]^{-1/2},$$

$M_i>0, i=1,2.$

Теперь в системе (13) положим

$$\chi=\max_{x_1,x_2}\left|Z(x_1,x_2)\right|+\max_{x_2}\left|\lambda_{i_0}(x_2)\right|.$$

Из системы (13) получим

$$\chi\le N_2\left[\sum_{i=1}^{2}\left\|\delta_i(x_2)\right\|_{C[0,l_2]}+\left\|\delta_7(x_1,x_2)\right\|_{C(\overline{D})}+\left\|\tilde{\delta}_e(x_1,x_2)\right\|_{C^2(\overline{D})}+\right. \\ \left.+\left\|\delta_8(x_2)\right\|_{C[0,l_2]}\ \right]+\chi N_3(l_1 l_2)^{1/2}.$$

$N_i, i-2,3$ некоторые положительные числа. Отсюда, учитывая условие, теоремы получим, что при $(x_1,x_2)\in\overline{D}$ верна оценка устойчивости (7). Единственность решения задачи следует из оценки (7). Теорема доказана.

4. Метод последовательных приближений

Метод последовательных приближений для решения задачи (1) –(5) применяется по схеме

$$-a_{i_0}^{(s)}(x_2)u_{x_{i_0}x_{i_0}}^{(s+1)}-a_{i_1}(x_2)u_{x_{i_1}x_{i_1}}^{(s+1)}+c(x_2)u^{(s+1)}=h(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in D, \tag{14}$$

$$u^{(s+1)}(0,x_2)=\phi_1(x_2),\ (2-e)u^{(s+1)}(l_1,x_2)+(e-1)u_{x_1}^{(s+1)}(l_1,x_2)=\phi_2(x_2), \\ 0\le x_2\le l_2, \tag{15}$$

$$b_0u_{x_2}^{(s+1)}(x_1,0)+b_1u^{(s+1)}(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\quad 0\le x_1\le l_1, \tag{16}$$

$$d_0u_{x_2}^{(s+1)}(x_1,l_2)+d_1u^{(s+1)}(x_1,l_2)=\varphi_1(x_1),\quad 0\le x_1\le l_1, \tag{17}$$

$$a_{i_0}^{(s+1)}(x_2)u_{x_1}^{(s+1)}(0,x_2)=g_{i_0}(x_2),\quad 0\le x_2\le l_2 \tag{18}$$

По схеме (14)–(18) последовательные итерации проводятся следующим образом: сперва выбираются некоторые $a_{i_0}^{(0)}(x_2)>0$ принадлежащие

$C^{\alpha}[0,l_2]$ и подставляются в уравнение (14). Далее решается задача (14) –(17) и находится $u^{(1)}(x_1,x_2)$. По функции $u^{(1)}_{x_1}(0,x_2)$, из условий (18) находится $a^{(1)}_{i_0}(x_2)$ и эта функция используется для проведения следующего шага итерации.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1)–(5) существует и при всех $s=0,1,...,$ $u^{(s)}$

$$(x_1,x_2)\in C^2(D), a^{(s)}_{i_0}(x_2)\in C^{\alpha}[0,l_2], g_1(x_2)u^{(s)}_{x_1}(0,x_2)>0, Nl_1l_2<1$$

и производные функции $u^{(s)}(x_1,x_2)$ по x_1,x_2 до второго порядка равномерно ограничены. Тогда функции $\{a^{(s)}_{i_0}(x_2),\ \ u^{(s)}(x_1,x_2)\}$ полученные методом последовательных приближений (14) – (18) при $s\to+\infty$ равномерно сходятся к решению задачи (1)–(5) со скоростью геометрической прогрессии. N –положительное постоянное, зависящее от данных задачи.

Доказательство. Положим

$$Z^{(s)}(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)-u^{(s)}(x_1,x_2), \lambda^{(s)}_{ii_0}(x_2)=a_{i_0}(x_2)-a^{(s)}_{i_0}(x_2).$$

Из (1) – (5), соответственно, вычитая (14) – (18) получим

$$-a_{i_0}(x_1)Z^{(s+1)}_{x_{i_0}x_{i_0}}-a_{i_1}(x_1)Z^{(s+1)}_{x_{i_2}x_{i_2}}+c(x_1)Z^{(s+1)}=$$

$$=\alpha^{(s)}_{i_0}(x_1,x_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(x_2),\ (x_1,x_2)\in D, \tag{19}$$

$$Z^{(s+1)}(0,x_2)=0,(2-e)Z^{(s+1)}(l_1,x_2)+(e-1)Z^{(s+1)}_{x}Z_1,x_2)=0, \tag{20}$$

$$b_0Z^{(s+1)}_{x_2}(x_1,0)+b_1Z^{(s+1)}(x_1,0)=0, \tag{21}$$

$$d_0Z^{(s+1)}_{x_2}(x_1,l_2)+d_1Z^{(s+1)}(x_1,l_2)=0, \tag{22}$$

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_2)=\gamma^{(s)}(x_2)Z^{(s+1)}_{x_1}(0,x_2), \tag{23}$$

где

$$\alpha^{(s)}_{i_0}(x_1,x_2)=u^{(s+1)}_{x_{i_0}x_{i_0}},\ \gamma^{(s)}(x_2)=a_{i_0}(x_1)[-u^{(s+1)}_{x_1}(0,x_2)]^{-1}.$$

При помощи функции Грина из (19) –(22) определим $Z^{(s+1)}(x_1,x_2)$ через правую часть равенства (19) и подставим это выражение в условие (23). Тогда получим

$$\lambda^{(s+1)}_{i_0}(x_2)=\gamma^{(s)}_1(x_2)\int_D G_{x_1}(0,x_2,\xi_1,\xi_2)\left[\alpha^{(s)}_{i_0}(\xi_1,\xi_2)\lambda^{(s)}_{i_0}(\xi_2)\right]d\xi_1 d\xi_2. \tag{24}$$

Положим $\chi^{(s)}=\max\limits_{x_2}\left|\lambda^{(s)}_{i_0}(x_2)\right|.$ Прежним путем как доказательство теоремы 1 из системы (24) следует, что $\chi^{(s+1)}\le\chi^{(s)}N_3(l_1l_2)^{1/2}$. Таким образом теорема доказана.

5. Существования решения

Сначала докажем одну лемму. Для простоты будем принимать $c(x_2)=1.$

Лемма 2. Пусть задача

$$-a_1(x_2)u_{x_1x_1}-a_2(x_2)u_{x_2x_2}+u=h(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in D, \tag{25}$$

$$u(0,x_2)=\phi_1(x_2),\ (2-e)u(l_1,x_2)+(e-1)u_{x_1}(l_1,x_2)=\phi_2(x_2),\ 0\le x_2\le l_2, \tag{26}$$

$$b_0u_{x_2}(x_1,0)+b_1u(x_1,0)=\varphi_1(x_1),\ 0\le x_1\le l_1, \tag{27}$$

$$d_0u_{x_2}(x_1,l_2)+d_1u(x_1,l_2)=\varphi_2(x_1),\quad 0\le x_1\le l_1, \tag{28}$$

удовлетворяющих условиям

$b_0\phi_{1x_2}(0)+b_1\phi_1(0)=\varphi_1(0), d_0\phi_{1x_2}(l_2)+d_1\phi_1(l_2)=\varphi_2(0),$

$b_0\phi_{2x_2}(0)+b_1\phi_2(0)=\varphi_1^{(e-1)}(l_1), d_0\phi_{2x_2}(l_2)+d_1\phi_2(l_2)=\varphi_2^{(e-1)}(l_1)$ при заданном $a_1(x_2),\ a_2(x_2)\ge\mu_0>0$ имеет решение, принадлежащие $C^2(D)\cap C(\overline{D})$ и

$$-Ml_1\le h(x_1,x_2)\le 0,\ (-1)^{e-1}\phi_2(x_2)\ge 0,\ (b_1-b_0)\varphi_1(0)\ge 0,\ \varphi_2(0)\ge 0,$$

$b_1\varphi_{1x_1}(0)<b_0, d_1\varphi_{2x_1}(0)<d_0, \phi_{1x_2x_2}(x_2)=0,$

$l_1^{1-e}m(x_2)\le(2-e)\phi_1(x_2)-\phi_2(x_2)\le(1-e)\left[(2\mu_0)^{-1}l_1\phi_1(x_2)\right]+Ml_1^{2-e},$

$\left[b_1m(0)-b_0m'(0))\right]l_1^{-1}x_1\le(b_0-b_1)\left[\varphi_1(0)-\varphi_1(x_1)\right]\le b_1Mx_1,$

$\left[d_0m'(l_2)+d_0m(l_2))\right]l_1^{-1}x_1\le\varphi_2(0)-\varphi_2(x_1)\le d_1Mx_1.$

Тогда

$$-M-\phi_1(x_2)(2\mu_0)^{-1}l_1\le u_{x_1}(0,x_2)\le -m(x_2)l_1^{-1}, \tag{29}$$

где

$$M=\max\left\{\max_{x_2}l_1^{-1}[\phi_1(x_2)-\phi_2(x_2)],b_1\max_{x_1}\left|\varphi_{1x_1}(x_1)\right|,\ d_1\max_{x_1}\left|\varphi_{2x_1}(x_1)\right|\ \right\},$$

$m(x_2)\in C^2[0,l_2], m(x_2)>0, b_0m'(0)+b_1>0, d_0m'(l_2)-d_1<0, m''(x_2)\ge 0.$

Доказательство. Положим

$$\upsilon(x_1,x_2)=u(x_1,x_2)+m(x_2)x_1l_1^{-1}-\phi_1(x_2), V(x_1,x_2)=-u(x_1,x_2)+\phi_1(x_2)-$$
$$-Mx_1-\phi_1(x_2)(2\mu_0)^{-1}x_1(l_1-x_1).$$

Нетрудно проверить, что $\upsilon(x_1,x_2)$ удовлетворяет условиям задачи

$$-a_1(x_2)\upsilon_{x_1x_1} - a_2(x_2)\upsilon_{x_2x_2} + \upsilon = -\phi_1(x_2) +$$
$$+ m(x_2)l_1^{-1}x_1 - a_2(x_2)m''(x_2)x_1l_1^{-1} + h(x_1,x_2),$$
$$\upsilon(0,x_2) = 0,$$
$$(e-1)\upsilon_{x_1}(l_1,x_2) + (2-e)\upsilon(l_1,x_2) = (e-1)m(x_2)l_1^{-1} +$$
$$+ (2-e)\left[m(x_2) - \phi_1(x_2)\right] + \phi_2(x_2),$$
$$b_0\upsilon_{x_2}(x_1,0) + b_1\upsilon(x_1,0) = \varphi_1(x_1) + b_0\left[-\phi_{1x_2}(0) + m'(0)l_1^{-1}x_1\right] +$$
$$+ b_1\left[-\phi_1(0) + m(0)l_1^{-1}x_1\right],$$
$$d_0\upsilon_{x_2}(x_1,l_2) + d_1\upsilon(x_1,l_2) = \varphi_2(x_1) + d_0\left[-\phi_{1x_2}(l_2) + m'(l_2)l_1^{-1}x_1\right] +$$
$$+ d_1\left[-\phi_1(l_2) + m(l_2)l_1^{-1}x_1\right].$$

Учитывая условия леммы, получаем что наибольшее положительное значение функции $\upsilon(x_1,x_2)$ достигается при $x_1 = 0$. Тогда $\upsilon_{x_1}(0,x_2) \le 0$, другими словами

$$u_{x_1}(0,x_2) \le -m(x_2)l_1^{-1}. \qquad (30)$$

Аналогично прежнему, после подстановки $V(x_1,x_2)$ в (25)–(28) учитывая усло-вия леммы, получаем, что наибольшее положительное значение функции $V(x_1,x_2)$ дос-тигается при $x_1 = 0$. Поэтому $V_{x_1}(0,x_2) \le 0$ или

$$-M - \phi_1(x_2)(2\mu_0)^{-1}l_1 \le u_{x_1}(0,x_2). \qquad (31)$$

Объединяя оценки (30) и (31), получим оценку (29). Лемма 2 доказана.

Теорема 3. Пусть

$$-Ml_1 \le h(x_1,x_2) \le 0,\ (-1)^{e-1}\phi_2(x_2) \ge 0,\ (b_1 - b_0)\varphi_1(0) \ge 0,\ \varphi_2(0) \ge 0,$$
$$b_1\varphi_{1x_1}(0) < b_0,\ d_1\varphi_{2x_1}(0) < d_0,\ \phi_{1x_2x_2}(x_2) = 0,$$
$$l_1^{1-e}m(x_2) \le (2-e)\phi_1(x_2) - \phi_2(x_2) \le (1-e)\left[(2\mu_0)^{-1}l_1\phi_1(x_2)\right] + Ml_1^{2-e},$$
$$\left[b_1m(0) - b_0m'(0))\right] l_1^{-1}x_1 \le (b_0 - b_1)\left[\varphi_1(0) - \varphi_1(x_1)\right] \le b_1Mx_1,$$
$$\left[d_0m'(l_2) + d_0m(l_2))\right] l_1^{-1}x_1 \le \varphi_2(0) - \varphi_2(x_1) \le d_1Mx_1,$$
$$g_1(x_2) < 0,\ \ g_0' \le -g_1(x_2) - \frac{1}{2}\phi_1(x_2)l_1,$$

$m(x_2)$ – такая неотрицательная функция, что $g_1(x_2)[m(x_2)]^{-1}$ ограничено, g_0' –положительное число. Тогда задача (1)–(5) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. Доказательство проводится методом последовательных приближений. Из утверждения леммы следует, что

$$-M[1 + \phi_1(x_2)(2g_0')^{-1}l_1] \le u_{x_1}^{(s+1)}(0,x_2) \le -m(x_2)\cdot l_1^{-1},\ 0 < x_2 < l_2,$$

тогда

$$g_0' M^{-1} \le a_{i_0}^{(s+1)}(x_2) \le \max_{x_2}\{-g_1(x_2)[m(x_2)]^{-1}\} \cdot l_1$$

Таким образом, для всех приближений $a_{i_0}^{(s)}(x_2)$–строго положительная, непрерыв-ная и равномерно ограниченная функция. Тогда из общей теории эллиптических уравнений следует, что при условиях теоремы последовательность $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ равномерно ограничена по норме $W_p^2, p > 2.$ Поэтому $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ компактна в $C^1(\overline{D}).$ При этом из условия (18) следует, что последовательность $a_{i_0}^{(s+1)}(x_2)$ будет компактна в $C[0, l_2].$ От-сюда и из (14)–(17) вытекает компактность $\{u^{(s)}(x_1, x_2)\}$ в $C^2(\overline{D})$. В системе (14)–(18) переходя к пределу при $s \to +\infty$ получим, что существует пара функций $\{a_{i_0}(x_2), \ \ u(x_1, x_2)\}$ удовлетворяющих условиям (1)–(5). Теорема доказана.

При $k = 0, q = 0$ для функции $\tilde{\delta}_e(x_1, x_2)$ получим следующие выражение

$$\tilde{\delta}_e(x_1, x_2) = (\frac{l_1 - x_1}{l_1})^e \delta_3(x_2) + \frac{x_1^e}{2^{e-1} l_1}\delta_4(x_2) + \frac{l_2 - x_2}{l_2}\left[\delta_5(x_1) - (\frac{l_1 - x_1}{l_1})^e \delta_5(0) - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1^e}{2^{e-1} l_1}\delta_5^{(e-1)}(l_1)\right] + \frac{x_2}{l_2}\left[\delta_6(x_1) - (\frac{l_1 - x_1}{l_1})^e \delta_6(0) - \frac{x_1^e}{2^{e-1} l_1}\delta_6^{(e-1)}(l_1)\right].$$

При $k = 0, q = 0, e = 1$ для решения задачи (1)–(5) можно брать следующие функции:

$$u(x_1, x_2) = -(\frac{x_{22}^2}{2} + \frac{x_2 + 1}{2} - x_1)x_1 + \frac{5}{2} \ ,$$

$$a_1(x_2) = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{5}{2}), a_2(x_2) = x_2 + 1, c(x_2) = 1.$$

В этом случае $m(x_2)$ определяется следующим образом:

$$m(x_2) = \frac{x_2^2 + x_2 + 1}{2} l_1.$$

Для этих функций удовлетворяются условия теоремы 3.

Литература

1. Алиев. Р.А. Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в линейном эллиптическом уравнении, Вест. Сам. Гос. Тех. Ун-та., Сер.физ.-мат.наук, 2014, выпуск 3(36), с.31-43.
2. Алиев. Р.А. Об определении неизвестных коэффициентов при старших производных в эллиптических уравнений, Тезисы докладов

международного научного семинара по обратном поставленным задачам, Москва, 2015, с.21-22.
3. Вабищевич П.Н., О единственности некоторых обратных задач для эллиптических уравнений, Дифференц. Уравнения, 1988, т.24, №12, с.2125-2129.
4. Вахитов И.С., Обратная задача идентификации старшего коэффициента в уравнении диффузии реакции, Дальневосточный матем. жур., 2010, т.10, №2, с.93-105.
5. Искендеров А.Д. Обратная задача об определении коэффициентов квазилинейного эллиптического уравнения, Изв. АН. Аз.ССР, 1978, №2, с.80-85.
6. Искендеров А.Д., Обратная задача об определении коэффициентов эллиптического уравнения, Дифференц. Уравнения, 1979, т.20, №11, с.858 -867.
7. Клибанов М.В., Обратные задачи в целом и Карлемановские оценки, Дифференц. Уравнения, 1984, т.20, №6, с.1035-1041.
8. Клибанов М.В., Единственность в целом обратных задач для одного класса дифференциального уравнения, Дифференц. уравнения, 1984, т.20, №11, с.1947-1953.
9. Кабанихин С.И., Обратные и Некорректные Задачи, Учебник для студентов вузов, Новосибирск: Сибирское науч. изд-во, 2009, 450с.
10. Лажыженская О.Г., Уральцева Н.Н., Линейные и Квазилинейые Уравнения Эллиптического Типа, Москва, Наука,1973, 576с.
11. Миранда К., Уравнения с Частными Производными Эллиптического Типа, Москва, Инностр. лит., 1957, 252 с.
12. Соловьев В.В., Обратные задачи определения источника и коэффициента в эллиптическом уравнении в прямоугольнике, Журнал выч. мат. и мат. физики, 2007, т.47, №8, с.1365-1377.
13. Хайдаров А., Об одной обратной задаче для эллиптических уравнений Некорректные задачи математической физики и анализа, Под. ред. С.А.Алексева, Новосибирск,1984, с.245-249.

Xətti elliptik tənliklərdə yüksək tərtibli törəmələrin qarşisindaki məlum olmayan əmsallarin təyini haqqinda

R.A. Əliyev, A.X. Abdullayev

XÜLASƏ

İşdə xətti elliptik tənliklərdə məlum olmayan əmsalların təyininə dair müxtəlif sərhəd şərtli tərs məsələlərinə baxılır. Varlıq, yeganəlik və dayanıglıq teoremləri isbat olunmuşdur. Ardıcıl yaxınlaşma metodundan istifadə edərək həllin tapılması alqoritmi qurulmuşdur.

Açar sözlər: tərs məsələ, elliptik tənlik, requlyasiya alqoritmi.

On a determination of unknown coefficients at the high derivatives in the linear elliptic equation

R.A. Aliyev, A.Kh. Abdullaev

ABSTRACT

In the paper inverse problems on determination of the unknown coefficients with various boundary conditions for the linear elliptic equations are considered. The theorems on existence, uniqueness and stability are proved. An algorithm is developed for the construction of the solution.

Keywords: inversion problem, eliptic equation, regulating algorithm.